

No.2 論理記号

この回のゴール

- 論理記号 $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ の意味を真理値表で説明できる.
- 「ならば」の否定や対偶を正しく作れる.
- $\forall, \exists$ を使って文を書き, その否定を作れる. 量化子の順序による意味の違いを説明できる.
- 集合族の和集合・共通部分を扱い, 一般のド・モルガンの法則を示せる.

■ 1. 命題と論理記号

No.1 では「または」「かつ」「ならば」を使って集合の演算を定め, 証明を書いた. この回では, こうした「論理の言葉」そのものを記号で整理する. 大学数学の定義や定理は, この回の記号で書かれていることが多い.

定義 1 命題

正しいか正しくないかが**はっきり決まる**文や式を**命題**という. 命題が正しいとき**真**, 正しくないとき**偽**であるという. 真・偽を**真理値**といい, T (true), F (false) で表す.

例 1

「2 は素数である」は真の命題, 「 $1 + 1 = 3$ 」は偽の命題である. 「 $x > 2$ 」は x の値が決まらなると真偽が決まらないので, このままでは命題ではない. このように変数を含み, 変数に値を入れると命題になるものを**条件** (または**述語**) といい, $P(x)$ のように書く.

定義 2 論理記号

命題 p, q に対して, 次の新しい命題を考える. 真理値は下の表 (**真理値表**) で定める.

- **否定** $\neg p$: 「 p でない」 (本によっては $\bar{p}, \sim p$)
- **論理積** $p \wedge q$: 「 p かつ q 」
- **論理和** $p \vee q$: 「 p または q 」
- **含意** $p \Rightarrow q$: 「 p ならば q 」
- **同値** $p \Leftrightarrow q$: 「 p と q は同値」 ($(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ と同じ)

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

注意

- 数学の「または」は、**両方とも真の場合も含む** ($p \vee q$ は p, q がともに真でも真). 日常語の「A か B のどちらか一方」とは違う.
- $p \Rightarrow q$ は, p が偽のときは q によらず真とする. 「晴れたら遊園地に行く」と約束した人は, 雨の日はどう過ごしても約束を破ったことにはならない. 約束が破られる (偽になる) のは「晴れたのに行かなかった」ときだけである.
- $p \Rightarrow q$ は「 p が原因で q が起こる」という意味ではない. 「 $1 + 1 = 3$ ならば月は四角い」も (仮定が偽なので) 真の命題である.

2つの命題 P, Q が, p, q の真偽のどの組み合わせでも同じ真理値をもつとき, P と Q は**論理的に同値**であるといい, $P \equiv Q$ と書く. 論理的に同値な命題は, 証明の中で自由に取りかえてよい.

定理 1

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q).$$

【証明】真理値表で比べる. $\neg p \vee q$ は, p が T で q が F のときだけ F, それ以外は T になり, $p \Rightarrow q$ の列と一致する. $\square$

定理 2 ド・モルガンの法則 (論理)

- (1) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- (2) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- (3) $\neg(\neg p) \equiv p$
- (4) $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

【証明】(1)~(3) は真理値表で確かめられる ((1) は練習問題 1). (4) は, 定理 1, (2), (3) を使って $\neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q \equiv p \wedge \neg q$. $\square$

No.1 定理 2 のド・モルガンの法則 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ は, 定理 2 (2) を「 $x \in A$ 」「 $x \in B$ 」に使ったものである. 集合の $\cup, \cap, ^c$ は, 論理の $\vee, \wedge, \neg$ に対応している.

定理 2 (4) は特に大切である. 「 p ならば q 」の否定は「 p なのに q でない」であって, 「 p ならば q でない」ではない.

■ 2. 逆・裏・対偶

定義 3 逆・裏・対偶

命題 $p \Rightarrow q$ に対して, $q \Rightarrow p$ を**逆**, $\neg p \Rightarrow \neg q$ を**裏**, $\neg q \Rightarrow \neg p$ を**対偶**という.

定理 3 対偶

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

【証明】定理 1 より, 右辺は $\neg(\neg q) \vee \neg p \equiv q \vee \neg p \equiv \neg p \vee q$ で, これは定理 1 より左辺と同値. $\square$

逆や裏はもとの命題と同値ではない. 「 $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ 」は真だが, 逆「 $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ 」は偽 ($x = -2$). 一方, **対偶はつねにもとの命題と同値**なので, 直接示しにくいときは対偶を示せばよい.

例題 1

整数 n について、「 n^2 が偶数ならば n は偶数」を示せ.

【解答】 対偶「 n が奇数ならば n^2 は奇数」を示す. n が奇数なら $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) と書けて, $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ は奇数. 対偶が真なので, もとの命題も真である.

$p \Rightarrow q$ が真のとき, q は p であるための**必要条件**, p は q であるための**十分条件**という (高校と同じ). $p \Leftrightarrow q$ が真のとき, p と q は互いに**必要十分条件**である. 証明で「 $p \Leftrightarrow q$ を示す」ときは, No.1 で集合の相等を 2 つの包含に分けたのと同じく, $p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow p$ に分けて示すのが基本である.

■ 3. 量子化子 $\forall$ と $\exists$

定義 4 量子化子

集合 X 上の条件 $P(x)$ に対して,

- $\forall x \in X, P(x)$: 「**すべての** $x \in X$ に対して $P(x)$ が成り立つ」
- $\exists x \in X, P(x)$: 「 $P(x)$ をみたす $x \in X$ が**存在する** (少なくとも 1 つある)」

と書く. $\forall$ を**全称記号**, $\exists$ を**存在記号**といい, あわせて**量子化子**という.

$\forall$ は All の A を, $\exists$ は Exist の E をひっくり返した記号である. 「 $\exists x \in X$ s.t. $P(x)$ 」(s.t. は such that) のように書く本もある. また, $P(x)$ をみたす x が「ただ 1 つ存在する」ことを $\exists! x \in X, P(x)$ と書く.

例 2

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ は真. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$ は真 ($x = \sqrt{2}$). $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$ は偽 ($\sqrt{2}$ は無理数).

(2) $A \subset B$ は, $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$ と書ける.

(3) 量子化子は集合の言葉で言いかえられる. $S = \{x \in X \mid P(x)\}$ とおくと,

$$\forall x \in X, P(x) \iff S = X, \quad \exists x \in X, P(x) \iff S \neq \emptyset.$$

空集合の上の「すべて」

$X = \emptyset$ のとき, $\forall x \in \emptyset, P(x)$ は $P(x)$ が何であっても**真**である (反例となる x が 1 つもないから). 一方, $\exists x \in \emptyset, P(x)$ はつねに**偽**である. No.1 定理 1 (2) の $\emptyset \subset A$ は, 例 2 (2) の形で書くと「 $\forall x (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ 」となり, $x \in \emptyset$ がつねに偽なので真, と説明できる.

定理 4 量子化子を含む命題の否定

- (1) $\neg(\forall x \in X, P(x)) \equiv \exists x \in X, \neg P(x)$
- (2) $\neg(\exists x \in X, P(x)) \equiv \forall x \in X, \neg P(x)$

【証明】 例 2 (3) の S を使う. (1) 左辺は $S \neq X$, つまり「 X の中に S に入らない x がある」ことで, これは右辺である. (2) 左辺は $S = \emptyset$, つまり「どの $x \in X$ も S に入らない」ことで, これは右辺である. □

否定をとると, $\forall$ と $\exists$ が入れかわり, 条件が否定される. 「すべての人が賛成」の否定は「反対の人が (少なくとも 1 人) いる」であって, 「すべての人が反対」ではない. 「すべての x で $P(x)$ 」が偽であるこ

とを示すには, $P(x)$ が成り立たない x (反例) を 1 つあげればよい.

量子子の順序 量子子が 2 つ以上あるときは, **左から順に読む**. 順番を入れかえると意味が変わることがある.

$$(a) \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y \quad (b) \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x < y$$

(a) は「どんな x に対しても, (x に応じて) x より大きい y がある」で, 真 ($y = x + 1$ とすればよい). (b) は「ある y があって, どんな x も y より小さい」, つまり「最大より大きい実数がある」で, 偽 ($x = y$ が反例). (a) では y は x ごとに選び直してよいが, (b) では y を先に 1 つ決めてしまう, という違いである.

否定は, 定理 4 を外側から順に使えばよい.

$$\neg(\forall x, \exists y, P(x, y)) \equiv \exists x, \neg(\exists y, P(x, y)) \equiv \exists x, \forall y, \neg P(x, y).$$

例題 2

次の命題の否定を作れ. また, もとの命題の真偽を答えよ.

$$(1) \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m < n \quad (2) \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq M$$

【解答】 (1) 否定は $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \geq n$. $n = 1$ とすると, すべての $m \in \mathbb{N}$ で $m \geq 1$ なので, 否定が真. よってもとの命題は偽.

(2) 否定は $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, |\sin x| > M$. もとの命題は $M = 1$ とすれば成り立つので真 (「 $\sin x$ は有界である」という意味).

■ 4. 集合族と一般のド・モルガンの法則

No.1 では 2 つや 3 つの集合の和集合・共通部分考えた. 無限個の集合を扱うには, 量子子を使う.

定義 5 集合族の和集合・共通部分

集合 Λ の各要素 λ に集合 A_λ が対応しているとき, $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を**集合族**といい, Λ を**添字集合**という.

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid \exists \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\}, \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid \forall \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\}$$

をそれぞれ集合族の**和集合**, **共通部分**という. (共通部分は $\Lambda \neq \emptyset$ のときに考える.)

$\Lambda = \{1, 2\}$ なら $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$ にもどる. $\Lambda = \mathbb{N}$ のときは $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とも書く.

例 3

$$(1) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1), \quad (2) \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}, \quad (3) \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset.$$

(1) $0 \leq x < 1$ なら, n を大きくとれば $x \leq 1 - \frac{1}{n}$ となる. 一方, 1 はどの $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ にも入らない.

(2) 0 はすべての区間に入る. $x \neq 0$ なら, n を大きくとれば $\frac{1}{n} \leq |x|$ となり, x はその区間に入らない.

(3) どの $x > 0$ も, $\frac{1}{n} \leq x$ となる n の区間からは外れる. $x \leq 0$ はどの区間にも入らない.

注意

例 3 (1) のように、閉区間をいくつ合わせても閉区間になるとは限らない。また (3) のように、空でない集合が減っていても、共通部分は空集合になることがある。(1)~(3) で使った「どんな正の数 x に対して、 $\frac{1}{n} < x$ となる自然数 n がある」という性質を**アルキメデスの原理**といい、分野「解析学」第 1 章 No.1 で実数の連続性から証明する。

定理 5 一般のド・モルガンの法則

全体集合 U の部分集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ($\Lambda \neq \emptyset$) について、

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c, \quad \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c.$$

【証明】1つ目を示す。 $x \in U$ について、定理 4 (2) より

$$x \in \left(\bigcup_{\lambda} A_\lambda \right)^c \iff \neg(\exists \lambda, x \in A_\lambda) \iff \forall \lambda, x \notin A_\lambda \iff x \in \bigcap_{\lambda} A_\lambda^c.$$

2つ目も定理 4 (1) を使って同様に示せる。□

コラム：論理そのものを数学にする

この回では、論理記号を「ふだん使う言葉の整理」として扱った。では、「証明できる」とはどういうことか、「真である」こととどう関係するのか、を数学の対象として研究するとどうなるだろうか。それが分野「数理論理学」である。命題論理は分野「数理論理学」第 1 章、量子子を含む述語論理は分野「数理論理学」第 2 章で扱う。さらにゲーデルは、「真なのに証明できない命題」がある（不完全性定理）ことを示した（分野「数理論理学」第 5 章）。

■ 練習問題

発展 のついた問題は、この回の内容から一歩踏み出した発展問題である。最初は飛ばして、ほかの問題が解けてから挑戦するとよい。

1. 真理値表を書いて、次の (1), (2) を確かめよ。

$$(1) \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \quad (2) p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

2. 次の命題の否定を作れ。また、もとの命題と否定のどちらが真か答えよ。

(1) すべての自然数 n について、 n が素数ならば n は奇数である。

(2) ある実数 x について、 $x^2 + 1 = 0$ である。

3. 命題「 $x = 2$ ならば $x^2 = 4$ 」(x は実数) の逆・裏・対偶を書き、それぞれの真偽を答えよ。

4. 整数 n について、「 n^2 が 3 の倍数ならば、 n は 3 の倍数である」を対偶を使って示せ。

5. 次の命題を論理記号で書き、その否定を作れ。また、もとの命題の真偽を答えよ。

(1) すべての実数 x に対して、 $x^2 - 2x + 2 > 0$ 。

(2) どんな実数 x に対しても、 $y^2 = x$ となる実数 y がある。

(3) ある実数 y があって、すべての実数 x に対して $xy = x$ となる。

6. 次の集合を求めよ。

$$(1) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 2 \right] \quad (2) \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 1 + \frac{1}{n} \right) \quad (3) \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty)$$

7. $\Lambda \neq \emptyset$ とする。 $B \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (B \cap A_\lambda)$ を示せ。

8. **発展** (考えてみよう) 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束することは、論理記号を使って次のように定義される (分野「解析学」第2章 No.1)。

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon).$$

(a) この命題の否定を作れ。

(b) $a_n = (-1)^n$ が 0 に収束しないことを、(a) を使って示せ。

■ 練習問題の解答

1. (1) $\neg(p \wedge q)$ は「 p, q がともに T」のときだけ F. $\neg p \vee \neg q$ も「 $\neg p, \neg q$ がともに F」, つまり「 p, q がともに T」のときだけ F. 4通りすべてで一致する.

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T

(2) p, q, r の $2^3 = 8$ 通りを調べる. p が F なら両辺とも F. p が T なら両辺とも $q \vee r$ と同じ真値になる. よって一致する. (これは No.1 定理 2 (3) の分配法則 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ の論理版である.)

2. (1) 否定は「ある自然数 n について, n は素数であり, かつ n は偶数である」(定理 2 (4) と定理 4 (1)). $n = 2$ がこれをみたすので, 否定が真 (もとの命題は偽).

(2) 否定は「すべての実数 x について, $x^2 + 1 \neq 0$ ». $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ なので否定が真.

3. 逆「 $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ 」: 偽 ($x = -2$). 裏「 $x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$ 」: 偽 ($x = -2$). 対偶「 $x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$ 」: 真 (もとの命題が真だから). 逆と裏も互いに対偶の関係にあるので, 真偽は一致する.

4. 対偶「 n が 3 の倍数でないならば, n^2 は 3 の倍数でない」を示す. $n = 3k \pm 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) と書いて, $n^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$ は 3 で割って 1 余る. よって 3 の倍数でない.

5. (1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 > 0$. 否定は $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 \leq 0$. $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$ なので, もとの命題は真.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$. 否定は $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 \neq x$. $x = -1$ とすると, どの実数 y でも $y^2 \geq 0 \neq -1$ なので否定が真. もとの命題は偽.

(3) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, xy = x$. 否定は $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, xy \neq x$. $y = 1$ とすれば, すべての x で $xy = x$ なので, もとの命題は真.

6. (1) $(0, 2]$. $0 < x \leq 2$ なら $\frac{1}{n} \leq x$ となる n がある (アルキメデスの原理). $x \leq 0$ や $x > 2$ はどの区間にも入らない.

(2) $[0, 1]$. 1 はすべての $[0, 1 + \frac{1}{n})$ に入る. $x > 1$ なら $1 + \frac{1}{n} \leq x$ となる n で外れる.

(3) $\emptyset$. どの実数 x も, $n > x$ となる自然数 n をとれば $[n, \infty)$ に入らない.

7. $x \in B \cap \bigcup_{\lambda} A_{\lambda} \iff x \in B$ かつ $\exists \lambda, x \in A_{\lambda} \iff \exists \lambda, (x \in B \text{ かつ } x \in A_{\lambda}) \iff x \in \bigcup_{\lambda} (B \cap A_{\lambda})$. (2つ目の $\iff$ では, 「 $x \in B$ 」は λ によらないので, $\exists \lambda$ の内側に入れてよい.)

8. (a) 定理 2 (4) と定理 4 を外側から使うと,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N \wedge |a_n| \geq \varepsilon).$$

「ある ε について, どんなに先 (N 以降) を見ても, $|a_n| \geq \varepsilon$ となる n が必ず現れる」という意味である.

(b) $\varepsilon = \frac{1}{2}$ とする. どんな $N \in \mathbb{N}$ に対しても, $n = N$ とすれば $n \geq N$ で $|a_n| = |(-1)^N| = 1 \geq \frac{1}{2}$. よって (a) の命題が真なので, a_n は 0 に収束しない.